Absolutní derivace, pseudoparalelní přenos, vektor rotace

Kamil Maleček, Dagmar Szarková

Abstrakt
Absolutní derivace a pseudoparalelní přenos se definuje pro vektorové pole podél křivky, která leží na ploše. V článku definujeme absolutní derivaci a pseudoparalelní přenos obecnějším způsobem. Absolutní derivace a pseudoparalelní přenos podél křivky na ploše je pak speciálním případem. Při zavedení užíváme metodu pohyblivého repéru. Dále odvozujeme podmínku, kdy normované vektorové pole vektorů rotace představuje pseudoparalelní přenos vektoru. Na závěr ilustrujeme Levi-Civitovu geometrickou konstrukci přenosu na konkrétním příkladě.

Klíčová slova: absolutní derivace, pseudoparalelní a paralelní přenos vektoru, vektor rotace.

Abstract
Absolute derivative and the Levi-Civita parallelism is defined for the vector field along a curve located on a surface. In the paper, a more general concept is adopted, from which absolute derivative and the Levi-Civita parallelism along a curve located on a surface can be derived as special case. Moving frame method basis is used in the definition. Condition, under which normed vector fields of the curl vector represent the Levi-Civita parallelism of a vector is proved. Finally, the Levi-Civita geometric construction of the displacement is illustrated on specific example.

Key words: absolute derivative, Levi-Civita pseudoparallel and paralel transport of a vector, vector of rotation.

Úvod

Při definování pojmů absolutní derivace a pseudoparalelní přenos vektoru obecným způsobem užíváme metodu pohyblivého repéru. Tuto metodu použil již L. Euler (1707-1763), poté francouzští matematici G. Darboux (1842-1917) a zvláště pak E. Cartan (1869-1951).

V souvislosti s metodou pohyblivého repéru se objevují tři funkce k_{12}, k_{23} a k_{31} pomocí nichž můžeme vyjádřit derivace vektorových funkcí, kterými jsou dány vektory repéru, viz. 2. odstavec článku, a také [1].

Ve 3. odstavci uvádíme, že přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k jistému systému rovin představuje vektorové pole dané vektorovou funkcí, ve které stačí zadat reálnou funkci α třídy $C^{(1)}$. Zvolíme-li funkci α jako záporně vzatý integrál z funkcí k_{ij}, pak vektorové pole představuje pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k příslušnému systému rovin, viz. 4. odstavec.

Absolutní derivace vektorového pole a pseudoparalelní přenos vektoru se v literatuře definuje v případě, kdy $\mathcal{K}$ je křivka na ploše κ a systém rovin, vzhledem ke kterému uvedené pojmy definujeme, je tvořen tečnými rovinami plochy κ v bodech křivky $\mathcal{K}$. Z pohledu obecného přístupu je to speciální případ, uvedený v odstavcích 3.3 a 4.3. Např. v [3], [7] je uveden jiný způsob vyjádření souřadnic vektorů vektorového pole, které je jeho absolutní derivací, a to pomoci Christoffelových symbolů. Obvykle se nejprve definuje paralelní přenos vektoru podél křivky v rovině a žádá se, aby pseudoparalelní přenos byl přenesením paralelního přenosu z roviny na obecnější plochu, viz. [3], [7] a [9]. Náš postup je opačný, paralelní přenos je nejspeciálnější případ obecného pseudoparalelního přenosu, viz. odstavec 4.5.

Budeme pracovat v trojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru $\boldsymbol{E}_3$ a v jeho zaměření – vektorovém prostoru $V(\boldsymbol{E}_3)$. Budeme uvažovat křivky a plochy vnořené do prostoru $\boldsymbol{E}_3$. Absolutní derivaci a pseudoparalelní přenos můžeme studovat také v Riemannových a dalších prostorech i vyšší dimenze na obecnějších plochách, které nazýváme diferencovatelné variety. Fyzikální přístup k uvedeným pojmům na diferencovatelných varietách najdeme např. v [4].

1. Vektorové pole a přenos vektoru

V trojrozměrném prostoru mějme regulární křivku $\mathcal{K}$, která je parametrizovaná vektorovou funkcí

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\,, \quad s \text{ je oblouk křivky } \mathcal{K}\,.$$

Vektory $\mathbf{x}(s)$ jsou průvodní vektory bodů $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$.

Definice 1. Systém jednotkových vektorů, jejichž počáteční body umístíme do bodů křivky $\mathcal{K}$, nazveme vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$.

Poznámka. Obecně vektory pole nemusí být jednotkové. V dalším textu je však tento předpoklad důležitý. Z obecného vektorového pole lze normováním vektorů docílit, aby pole tvořily jednotkové vektory.

Vektorové pole je dáno vektorovou funkcí

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\,, \quad \|\mathbf{v}(s)\| = 1, \quad \text{pro všechna } s \in \boldsymbol{I}\,, \tag{1}$$

funkce nechť je třídy alespoň $C^{(1)}$.

Příkladem vektorového pole je množina jednotkových směrových vektorů tečen křivky $\mathcal{K}$. Pole je dáno vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{x}'(s)\,, \quad \text{resp. } \mathbf{v}(s) = \mathbf{t}(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\,.$$

Poznámka. V celém textu značíme $\dfrac{d(\circ)}{ds} = (\circ)'$.

Obdobně můžeme vytvořit vektorové pole hlavních normál a binormál křivky $\mathcal{K}$.

Definice 2. Nechť $\mathbf{v}$ je jednotkový vektor, jehož počáteční bod umístíme do všech bodů křivky $\mathcal{K}$. Tak dostaneme vektorové pole podél křivky, které nazveme konstantní vektorové pole.

Definice 3. Každé vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ představuje přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$.

2. Pohyblivá ortonormální báze – repér a systémy rovin

2.1. Obecný repér

Nechť pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ tvoří vektory

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1(s)\,,\quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2(s)\,,\quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_3(s) \tag{2}$$

kladně orientovanou ortonormální bázi. Počáteční body vektorů umístíme do bodů $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$. Jestliže s pohybem bodu X po křivce $\mathcal{K}$ se zároveň pohybují i vektory (2), tak hovoříme o pohyblivé ortonormální bázi tzv. repéru. Protože počáteční body vektorů repéru jsou umístěny do bodů křivky, hovoříme o průvodním repéru křivky. Speciální průvodní repér je Frenetův repér, viz. odstavec 2.3.

Podél křivky $\mathcal{K}$ můžeme utvořit tři systémy rovin Π_{ij}, $i, j = 1,2,3$, $i \neq j$. Pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ je rovina $\Pi_{ij}(s)$ určena bodem $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$ a vektory $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{t}_j(s)$ z (2) jsou její směrové vektory. Je zřejmé, že $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$.

Pro skalární součiny vektorových funkcí (2) platí identita

$$\mathbf{t}_i(s)\cdot\mathbf{t}_j(s) = \delta_i^j\ ,\quad i, j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Předpokládejme, že vektorové funkce (2) jsou třídy alespoň $C^{(1)}$. Diferencováním identity (3) dostaneme

$$d\mathbf{t}_i(s)\cdot\mathbf{t}_j(s) = -\mathbf{t}_i(s)\cdot d\mathbf{t}_j(s)\,. \tag{4}$$

Diferenciály vektorových funkcí (2) můžeme vyjádřit jako kombinaci vektorových funkcí (2):

$$d\mathbf{t}_i(s) = \omega_{ij}(s)\,\mathbf{t}_j(s)\,,\quad i, j = 1, 2, 3\ ,\ j \text{ je sčítací index.} \tag{5}$$

Poznámka. V sumační konvenci se u násobených veličin píše sumační index u jedné dole a u druhé nahoře. Striktní pravidlo to však není, viz. např. [2].

Pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ je čtvercová matice $(\omega_{ij}(s))$, z diferenciálních forem jedné proměnné s, antisymetrická, což plyne z (4). Proto v matici mohou být nenulové pouze tři formy s různými indexy:

$$\omega_{12}(s) = -\omega_{21}(s)\,,\quad \omega_{23}(s) = -\omega_{32}(s)\,,\quad \omega_{31}(s) = -\omega_{13}(s)\,.$$

Vzorce (5) můžeme psát také ve tvaru

$$\mathbf{t}_i'(s) = \frac{\omega_{ij}(s)}{ds}\,\mathbf{t}_j(s)\,. \tag{6}$$

Označíme-li

$$k_{ij}(s) = \frac{\omega_{ij}(s)}{ds}\ ,$$

tak vzorce (6) jsou

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1'(s) &= && k_{12}(s)\,\mathbf{t}_2(s) + k_{13}(s)\,\mathbf{t}_3(s)\,,\\
\mathbf{t}_2'(s) &= k_{21}(s)\,\mathbf{t}_1(s) && + k_{23}(s)\,\mathbf{t}_3(s)\,,\\
\mathbf{t}_3'(s) &= k_{31}(s)\,\mathbf{t}_1(s) + k_{32}(s)\,\mathbf{t}_2(s) &&\,, \qquad k_{ij}(s) = -k_{ji}(s)\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

viz. např. [1].

Dále uvedeme několik speciálních repérů.

2.2. Repér křivky na ploše

Nechť $\mathcal{K}$ je křivka ležící na ploše κ. Vektorové funkce (2) označme takto:

$$\mathbf{t}_1(s) = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{t}_2(s) = \mathbf{e}(s), \quad \mathbf{t}_3(s) = \mathbf{N}(s) . \tag{8}$$

Pro každé s $\in \boldsymbol{I}$ jsou vektory $\mathbf{t}(s)$ směrové vektory tečen křivky $\mathcal{K}$, vektory $\mathbf{e}(s)$ jsou směrové vektory průsečnic tečných rovin plochy κ a normálových rovin křivky $\mathcal{K}$ a $\mathbf{N}(s)$ jsou směrové vektory normál plochy κ v bodech $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$.

Vzorce (7) jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= && k_g(s)\,\mathbf{e}(s) + k_n(s)\,\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{e}'(s) &= -k_g(s)\,\mathbf{t}(s) && + k_t(s)\,\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) &= -k_n(s)\,\mathbf{t}(s) && - k_t(s)\,\mathbf{e}(s) , \end{aligned} \tag{9}$$

ve kterých hodnoty funkcí $k_g = k_g(s)$, $k_n = k_n(s)$, $k_t = k_t(s)$ jsou postupně geodetická, normálová křivost a geodetická torze v bodech $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$.

2.3. Frenetův repér

$\mathcal{K}$ je prostorová křivka bez singulárních bodů a vektorové funkce (2) nechť jsou funkce

$$\mathbf{t}_1(s) = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{t}_2(s) = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{t}_3(s) = \mathbf{b}(s) . \tag{10}$$

Pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ jsou vektory $\mathbf{t}(s)$ resp. $\mathbf{n}(s)$ resp. $\mathbf{b}((s)$ směrové vektory tečen resp. hlavních normál resp. binormál v bodech $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$. Tento repér se nazývá Frenetův. Vzorce (7) jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= && k_1(s)\,\mathbf{n}(s) , \\ \mathbf{n}'(s) &= -k_1(s)\,\mathbf{t}(s) && + k_2(s)\,\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= && -k_2(s)\,\mathbf{n}(s) . \end{aligned} \tag{11}$$

Funkce k_1 a k_2 jsou funkce 1. a 2. křivosti křivky $\mathcal{K}$. Vzorce (11) se nazývají Frenetovy.

2.4. Repér křivky v rovině

Nechť $\mathcal{K}$ je křivka v rovině π. Frenetův repér tvoří jednotkové směrové vektory tečen a normál, které jsou dány vektorovými funkcemi

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) \quad \text{a} \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s) .$$

Frenetovy vzorce se redukují na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= && k(s)\,\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s)\,\mathbf{t}(s) \end{aligned} \tag{12}$$

Hodnoty funkce k jsou křivosti křivky $\mathcal{K}$.

3. Absolutní derivace vektorového pole

3.1. Obecná absolutní derivace

V prostoru mějme dánu regulární křivku $\mathcal{K}$ a jednoparametrický systém rovin Π takový, že každá rovina $\Pi(s)$ prochází bodem $X(s)$ křivky $\mathcal{K}$. Dále mějme dáno vektorové pole **v** podél křivky $\mathcal{K}$ takové, že pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ je $\mathbf{v}(s)$ vektor ze zaměření roviny $\Pi(s)$.

Pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ uvažujme ve vektorovém prostoru $R_3 = V(\boldsymbol{E}_3)$ dva ortogonální podprostory $V_1(s)$ a $V_2(s)$. Podprostor $V_1(s)$, dimenze dva, je zaměření roviny $\Pi(s)$ a podprostor $V_2(s)$, dimenze jedna, je generován vektorem normály roviny $\Pi(s)$. Derivaci $\mathbf{v}'(s)$ vektorové funkce (1) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{v}'(s) = \mathbf{v}_1(s) + \mathbf{v}_2(s)\,,$$

kde $\mathbf{v}_1(s)$ resp. $\mathbf{v}_2(s)$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{v}'(s)$ do podprostoru $V_1(s)$ resp. $V_2(s)$.

Definice 4: Vektorovou funkci $\mathbf{v}_1$ nazveme absolutní derivace vektorového pole **v** vzhledem k systému rovin Π.

3.2. Absolutní derivace vzhledem k systémům Π_{ij}

Vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ nechť je dáno vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I} \quad . \tag{13}$$

Vektorové pole je určeno reálnou funkcí $\alpha = \alpha(s)$, která nechť je na intervalu $\boldsymbol{I}$ třídy $C^{(1)}$. Vektorové funkce $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1(s)$ a $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2(s)$ jsou první dvě funkce z (2) a spolu s bodem $X(s)$ určují rovinu $\Pi_{12}(s)$.

Derivace vektorové funkce (13) je vektorová funkce

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'(s) &= -\alpha'(s)\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_1'(s) + \\ &\quad + \alpha'(s)\cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_2'(s)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Derivaci můžeme užitím vzorců (7) upravit takto:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'(s) &= -\big(\alpha'(s) + k_{12}(s)\big)\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s) + \big(\alpha'(s) + k_{12}(s)\big)\cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s) + \\ &\quad + \big(k_{13}(s)\cos\alpha(s) + k_{23}(s)\sin\alpha(s)\big)\,\mathbf{t}_3(s)\,.\end{aligned}$$

Podle definice 4 je absolutní derivace vektorového pole (13) vzhledem k systému rovin Π_{12} vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_{12}(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s))\,, \quad s \in \boldsymbol{I} \quad . \tag{15}$$

Zcela obdobně bychom odvodili absolutní derivaci vektorového pole, které je dáno vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_3(s)\,, \qquad \text{resp.} \tag{16}$$

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_3(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\,, \tag{17}$$

vzhledem k systému rovin Π_{23} resp. Π_{31}.

Absolutní derivace vektorového pole (16) resp. (17) vzhledem k systému rovin Π_{23} resp. Π_{31} je vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_{23}(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_3(s)) \ , \ \text{ resp.} \tag{18}$$

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_{31}(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_3(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s)) \,, \quad s \in \boldsymbol{I} \ . \tag{19}$$

Dosavadní výsledky tohoto odstavce můžeme zformulovat do tvrzení:

Nechť podél křivky $\mathcal{K}$ je dáno vektorové pole vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_i(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_j(s) \,, \quad s \in \boldsymbol{I} \,, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \,. \tag{20}$$

Potom absolutní derivace vektorového pole (20) vzhledem k systému rovin Π_{ij} je vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_{ij}(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_i(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_j(s)) \,, \quad s \in \boldsymbol{I} \ . \tag{21}$$

Známe-li absolutní derivaci vzhledem k jednomu systému, pak absolutní derivaci vzhledem k dalším dvěma systémům dostaneme cyklickou záměnou indexů.

3.3. Absolutní derivace vektorových polí podél křivky na ploše

Nechť $\mathcal{K}$ je křivka ležící na ploše κ. Vektorové pole $\mathbf{v}$ podél křivky $\mathcal{K}$ nechť tvoří vektory ze zaměření tečných rovin plochy κ v bodech křivky $\mathcal{K}$. Vektorové pole $\mathbf{v}$ podél křivky $\mathcal{K}$ je dáno vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{e}(s) \,, \quad s \in \boldsymbol{I} \ , \tag{22}$$

v (13) jsme použili označení (8).

Ze vzorců (9) plyne, že ve vzorcích (7) je

$$k_{12}(s) = k_g(s) \,, \quad k_{13}(s) = k_n(s) \quad \text{a} \quad k_{23}(s) = k_t(s) \,.$$

Podle (15) je absolutní derivace vektorového pole (22) vzhledem k tečným rovinám plochy κ v bodech křivky $\mathcal{K}$ vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_g(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{e}(s)) \,, \quad s \in \boldsymbol{I} \ . \tag{23}$$

Obdobně dostaneme z (18) a (19) absolutní derivaci vektorových polí, které jsou dány vektorovými funkcemi

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{e}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{N}(s) \qquad \text{a} \tag{24}$$

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{N}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) \,, \quad s \in \boldsymbol{I} \ . \tag{25}$$

Absolutní derivace vzhledem k příslušnému systému rovin jsou vektorové funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_t(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{e}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{N}(s)) \qquad \text{a} \tag{26}$$

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_n(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{N}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}(s)) \ . \tag{27}$$

3.4. Absolutní derivace vektorových polí vzhledem k oskulačním, normálovým a rektifikačním rovinám křivky

Nechť $\mathcal{K}$ je prostorová křivka a nechť průvodní repér je Frenetův repér, jehož vektory jsou dány vektorovými funkcemi (10).

Vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ nechť je dáno vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{n}(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\ . \tag{28}$$

Pro každé s je vektor (28) vektorem ze zaměření oskulační roviny křivky $\mathcal{K}$ v bodě $X(s)$.

Ze vzorců (11) plyne, že ve vzorcích (7) je

$$k_{12}(s) = k_1(s)\,, \quad k_{23}(s) = k_2(s) \quad \text{a} \quad k_{31}(s) = 0 \quad \text{pro všechna } s \in \boldsymbol{I}\ .$$

Podle (15) je absolutní derivace vektorového pole (28) vzhledem k oskulačním rovinám křivky $\mathcal{K}$ vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_1(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{n}(s))\ . \tag{29}$$

Z (18) a (19) dostaneme absolutní derivace vektorových polí, které jsou dány vektorovými funkcemi

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{n}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{b}(s) \quad \text{a} \tag{30}$$

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{b}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\ . \tag{31}$$

Absolutní derivace vektorového pole (30) podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k normálovým rovinám křivky je vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = (\alpha'(s) + k_2(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{n}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{b}(s))\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\,, \tag{32}$$

a absolutní derivace vzhledem k rektifikačním rovinám křivky je vektorová funkce

$$\mathbf{v}_1(s) = \alpha'(s)(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{b}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}(s))\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\ . \tag{33}$$

3.5. Derivace vektorového pole podél křivky v rovině

Nechť $\mathcal{K}$ je křivka v rovině π a nechť systém rovin Π tvoří jedna rovina π v každém bodě křivky $\mathcal{K}$.

Vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{n}(s)\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\ , \tag{34}$$

je dáno vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$, všechny vektory pole jsou ze zaměření roviny π. Derivace vektorové funkce (34) je vektorová funkce

$$\mathbf{v}'(s) = (\alpha'(s) + k(s))(-\sin\alpha(s)\,\mathbf{t}(s) + \cos\alpha(s)\,\mathbf{n}(s))\,, \quad s \in \boldsymbol{I}\ . \tag{35}$$

Při výpočtu derivace $\mathbf{v}'(s)$ jsme užili vzorců (12).

Pro každé $s \in \boldsymbol{I}$ je $\mathbf{v}'(s)$ vektor ze zaměření roviny π, a proto absolutní derivace vektorového pole (34) vzhledem k rovině π je derivace (35).

4. Pseudoparalelní a paralelní přenos vektoru

4.1. Obecný pseudoparalelní přenos vektoru

V prostoru mějme regulární křivku $\mathcal{K}$ a podél křivky $\mathcal{K}$ jednoparametrický systém rovin Π. Nechť $\mathbf{v}$ je vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$, vektory pole jsou ze zaměření systému rovin Π v příslušných bodech křivky $\mathcal{K}$.

Definice 5. Vektorové pole **v** představuje pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k systému rovin Π, jestliže absolutní derivace vektorového pole vzhledem k systému rovin Π je nulový vektor v každém bodě křivky $\mathcal{K}$.

Tedy podle definice 4 je

$$\mathbf{v}_1(s) = \mathbf{0} \quad \text{pro všechna } s \in \boldsymbol{I}\,. \tag{36}$$

4.2. Pseudoparalelní přenos vektoru vzhledem k systémům Π_{ij}

Nechť vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ je dáno vektorovou funkcí (20). Z (21) a (36) plyne toto tvrzení:

Vektorové pole (20) *představuje pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky* $\mathcal{K}$ *vzhledem k systémům* Π_{ij}, *jestliže*

$$\alpha'(s) + k_{ij}(s) = 0 \quad \textit{pro všechna } s \in \boldsymbol{I}\,, \tag{37}$$

a odtud

$$\alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k_{ij}(s^*)\, ds^*\,, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j\,. \tag{38}$$

4.3. Pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky na ploše

Nechť $\mathcal{K}$ je křivka na ploše κ a nechť vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ je dáno vektorovou funkcí (22). Podle (37) představuje vektorové pole (22) pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k tečným rovinám plochy κ, jestliže

$$\alpha'(s) + k_g(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k_g(s^*)\, ds^*\,.$$

Pokud $\mathcal{K}$ je geodetická křivka na ploše κ, tak $k_g(s) = 0$ pro všechna $s \in \boldsymbol{I}$ a funkce α je na intervalu $\boldsymbol{I}$ konstantní.

Obdobně vektorovou funkci (24) resp. (25) je dán pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k příslušnému systému rovin, jestliže

$$\alpha'(s) + k_t(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k_t(s^*)\, ds^* \qquad \text{resp.}$$

$$\alpha'(s) + k_n(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k_n(s^*)\, ds^*\,.$$

Pokud $\mathcal{K}$ je asymptotická křivka na ploše κ tedy $k_n(s) = 0$ pro všechna $s \in \boldsymbol{I}$, tak funkce α v (25) je na intervalu $\boldsymbol{I}$ konstantní.

4.4. Pseudoparalelní přenos vektoru vzhledem k oskulačním, normálovým a rektifikačním rovinám křivky

Nechť vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ je dáno vektorovou funkcí (23). Podle (37) představuje vektorové pole (28) pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k jejím oskulačním rovinám, jestliže

$$\alpha'(s) + k_1(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k_1(s^*)\, ds^*$$

a obdobně vektorové pole (30) resp. (31) představuje pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k jejím normálovým resp. rektifikačním rovinám, jestliže

$$\alpha'(s) + k_2(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k_2(s^*)\, ds^* \qquad \text{resp.}$$

$\alpha'(s) = 0 \quad \Rightarrow$ funkce α je na intervalu $\boldsymbol{I}$ konstantní.

4.5. Paralelní přenos vektoru

Definice 6. Vektorové pole podél dané křivky $\mathcal{K}$ představuje paralelní přenos vektoru, jestliže je konstantní.

O paralelním přenosu se v literatuře hovoří, jestliže $\mathcal{K}$ je křivka v rovině π, viz. např. [3], [7].

Nechť vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$ je dáno vektorovou funkcí (34). Podle (35) a (37) představuje vektorové pole (34) paralelní přenos vektoru podél křivky $\mathcal{K}$ v rovině π jestliže

$$\alpha'(s) + k(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) = -\int_{s_0}^{s} k(s^*)\, ds^* \;. \tag{39}$$

Funkcí křivosti k je dána úhlová rychlost otáčení průvodního Frenetova repéru (podrobněji v následujícím odstavci). Pokud by vektor $\mathbf{v}$ měl konstantní souřadnice vzhledem k vektorům Frenetova repéru, pak spolu s otáčením repéru by se otáčel i vektor $\mathbf{v}$. Má-li být vektor $\mathbf{v}$ konstantní (to znamená, že jsou konstantní jeho souřadnice vzhledem k pevně zvolené bázi), pak jeho souřadnice vzhledem k vektorům Frenetova repéru nemohou být konstantní, musí to být funkce, kterými je kompenzováno otáčení repéru. Souřadnice vektorů $\mathbf{v}(s)$ vzhledem k vektorům Frenetova repéru jsou $(\cos\alpha(s),\ \sin\alpha(s))$, ve kterých volba funkce α z (39) znamená onu kompenzaci.

5. Vektor rotace a pseudoparalelní přenos

Nechť $\mathcal{K}$ je křivka parametrizovaná obloukem s se stále pozitivní 1. křivostí $k_1 = k_1(s)$. Rychlost pohybu bodu po křivce je konstantní, rovna 1. Nechť s pohybem bodu se zároveň pohybuje i průvodní repér, jehož vektory jsou dány vektorovými funkcemi (2). Repér se při pohybu po křivce také otáčí. Směrový vektor osy otáčení je vektor

$$\mathbf{d}(s) = k_{23}\, \mathbf{t}_1(s) + k_{31}\, \mathbf{t}_2(s) + k_{12}\, \mathbf{t}_3(s) \tag{40}$$

tzv. vektor rotace, viz. [1], [7]. Úhlová rychlost otáčení je $\|\mathbf{d}(s)\|$, otáčení je po směru pohybu hodinových ručiček, díváme-li se po směru vektorů $\mathbf{d}(s)$.

Poznámka. Pomocí vektorů (40) můžeme vzorce (7) psát ve tvaru

$$\mathbf{t}_i'(s) = \mathbf{d}(s) \times \mathbf{t}_i(s)\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Pokud $\mathcal{K}$ je prostorová křivka a vektory průvodního repéru jsou vektory Frenetova repéru z (10), tak vektor (40) je

$$\mathbf{d}(s) = k_2(s)\, \mathbf{t}_1(s) + k_1(s)\, \mathbf{b}(s)\;, \tag{41}$$

který se v [7] nazývá Darbouxův vektor rotace.

Pro každé s je $\mathbf{d}(s)$ ze zaměření z rektifikační roviny křivky $\mathcal{K}$. Normováním vektorů (41) vytvoříme vektorové pole podél křivky $\mathcal{K}$, jeho vektory jsou dány vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}}\big(k_2(s)\,\mathbf{t}(s) + k_1(s)\,\mathbf{b}(s)\big), \quad s \in \boldsymbol{I} \ . \tag{42}$$

Derivace vektorové funkce (42) je vektorová funkce

$$\mathbf{v}'(s) = \frac{k_1(s)k_2'(s) - k_2(s)k_1'(s)}{\sqrt{(k_1^2(s) + k_2^2(s))^3}}\big(k_1(s)\,\mathbf{t}(s) - k_2(s)\,\mathbf{b}(s)\big), \quad s \in \boldsymbol{I} \tag{43}$$

a podle definice 4 je to absolutní derivace vektorového pole (42).

Aby vektorové pole (42) představovalo pseudoparalelní přenos vektoru, tak podle definice 5 musí být hodnoty vektorové funkce (43) identicky nulový vektor. To bude tehdy, jestliže

$$k_1(s)\,k_2'(s) - k_2(s)\,k_1'(s) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} k_1(s) & k_2(s) \\ k_1'(s) & k_2'(s) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pro všechna } s \in \boldsymbol{I} \ . \tag{44}$$

Identické anulování determinantu z (44) znamená lineární závislost funkcí k_1 a k_2, tedy na intervalu $\boldsymbol{I}$ je

$$k_2(s) = C\,k_1(s)\,, \qquad C \in \boldsymbol{R}\,.$$

Platí tak toto tvrzení:

Vektorové pole utvořené z Darbouxových vektorů rotace představuje pseudoparalelní přenos vektoru podél křivky vzhledem k jejím rektifikačním rovinám právě tehdy, když funkce 1. a 2. křivosti jsou lineárně závislé.

Křivky, u kterých je v každém bodě podíl křivostí konstantní, se v [6] nazývají obecné šroubovice, v [3] také spádové křivky resp. křivky konstantního spádu.

6. Geometrická konstrukce přenosu

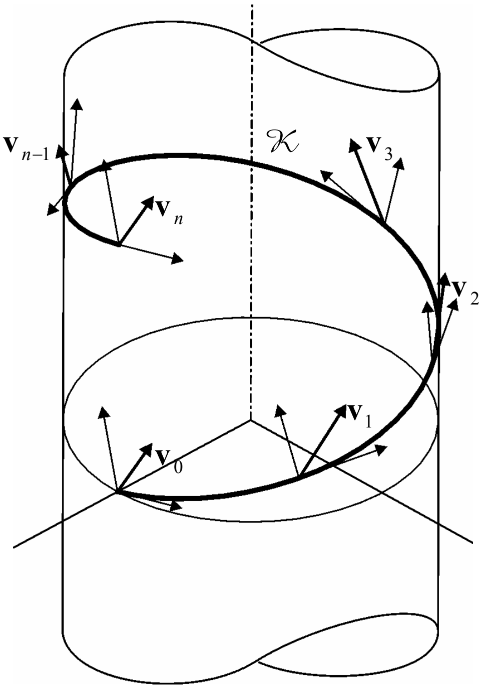
V prostoru mějme dánu křivku $\mathcal{K}$ a podél ní jednoparametrický systém rovin Π. Jestliže existuje obálka systému rovin Π, pak je to rozvinutelná přímková plocha $\bar{\kappa}$. Nechť je podél křivky $\mathcal{K}$ dáno vektorové pole, které představuje pseudoparalelní přenos vektoru vzhledem k systému rovin Π a nechť existuje obalová plocha $\bar{\kappa}$ systému rovin Π. Rozvineme-li plochu $\bar{\kappa}$ do roviny a křivka $\mathcal{K}$ se rozvine do křivky $\overline{\mathcal{K}}$, pak vektorové pole pseudoparalelních vektorů podél křivky $\mathcal{K}$ se rozvine do vektorového pole paralelních vektorů podél křivky $\overline{\mathcal{K}}$. Tuto geometrickou konstrukci dokázal Levi-Civita.

V [3] a [7] je znázorněn pseudoparalelní přenos vektoru podél obecné rovnoběžkové kružnice $\mathcal{K}$ kulové plochy. Systém rovin Π je tvořen tečnými rovinami kulové plochy v bodech kružnice $\mathcal{K}$, obalová plocha je rotační kuželová plocha $\bar{\kappa}$. Rovněž autoři zobrazili rozvinutí pseudoparalelního přenosu do paralelního přenosu.

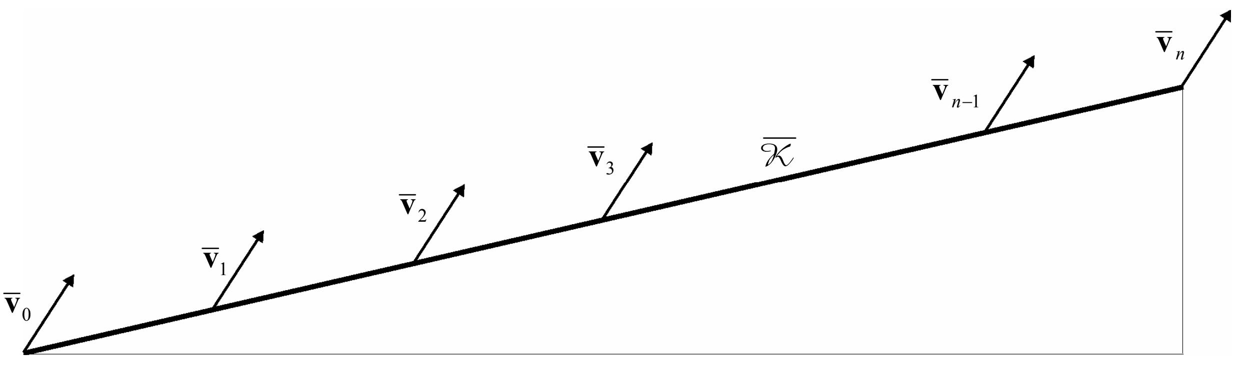
My jsme na obr. 1 znázornili situaci, kdy křivka $\mathcal{K}$ je jeden závit šroubovice na rotační válcové ploše κ. Plocha κ je rozvinutelná, a proto je i plochou $\bar{\kappa}$. Dále je v tomto případě šroubovice $\mathcal{K}$ geodetickou křivkou na ploše κ a systém tečných rovin je zároveň systémem rektifikačních rovin šroubovice. Z těchto důvodů podle odstavců 4.3 a 4.4 představuje vektorové pole dané vektorovou funkcí

$$\mathbf{v}(s) = \cos\alpha(s)\,\mathbf{t}_1(s) + \sin\alpha(s)\,\mathbf{t}_2(s)$$

pseudoparalelní přenos vektoru podél šroubovice $\mathcal{K}$ jak vzhledem k tečným rovinám válcové plochy κ tak vzhledem k rektifikačním rovinám šroubovice, jestliže na intervalu $\boldsymbol{I}$ je funkce α konstantní.



Obr. 1



Obr. 2

Jestliže je šroubovice $\mathcal{K}$ parametrizována vektorovou funkcí

$$\mathbf{x}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \quad s \in [0, L] \ ,$$

pak

$$\mathbf{t}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, b\right),$$

$$\mathbf{t}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\, a\right),\quad s\in[0,L],$$

kde $L = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

Na obr. 2 je znázorněna situace v rozvinutí. Jeden závit šroubovice je v rozvinutí úsečka $\overline{\mathcal{K}}$ a pseudoparalelní přenos je paralelním přenosem podél úsečky $\overline{\mathcal{K}}$.

Literatura

[1] BLASCHKE, W. *Einführung in die Differentialgeometrie*. Springer-Verlag, 1950, ruský překlad, Moskva, 1957.

[2] BRDIČKA, M. *Mechanika kontinua.* Praha: ČSAV,1959.

[3] BUDINSKÝ, B., KEPR, B. *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*. Praha: SNTL, 1970.

[4] FECKO, M. *Diferenciálna geometria a Lieovy grupy pre fyzikov*. Bratislava: IRIS, 2004.

[5] ФИНИКОВ,С., П. *Курс дифференциальной геометрии*. Учпедгез, 1952.

[6] HOSTINSKÝ, B. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Praha: JČMF, 1950.

[7] KREISZIG, E. *Differentialgeometrie*. 2. vyd. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1968.

[8] LEVI-CIVITA, T. *Der absolute Differentialkalkűl und seine Anwendungen in Geometrie und Physik.* Berlin: 1928.

[9] MALEČEK, K., SZARKOVÁ, D. Paralelní a pseudoparalelní přenos vektoru. In *Procedings of Symposium on Computional Geometry SCG'2004*, Kočovce, vol. 13. Bratislava: 2004, ISBN 80-227-2133-6, str. 76-80.

[10] MALEČEK, K., SZARKOVÁ, D. Pseudoparalelní přenos vektoru podél prostorové křivky. In *Procedings of Symposium on Computional Geometry SCG'2005*, Kočovce, vol. 14. Bratislava: 2005, ISBN 80-227-2278-2, str. 60-65.

RNDr. Kamil Maleček

Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT
Thákrurova 7, 166 29 Praha 6, ČR
e-mail: kamil@kmat.fsv.cvut.cz

RNDr. Dagmar Szarková

Katedra matematiky, Strojnícka fakulta STU
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: dagmar.szarkova@stuba.sk